Exercice 1

$$\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n + 3}{U_n + 6}, n \in \square \end{cases}$$

1) i/ pour $n = 0$ on a:

$-3 < U_0 = -1 < 1$ Vrai

ii) supposons que : $-3 < U_n < 1$

et montrons que : $-3 < U_{n+1} < 1$

En effet :

$U_n + 6 \geq -3 + 6 = 3 \succ 0$

- $U_{n+1} - 1 = \dfrac{4U_n + 3}{U_n + 6} - 1 = \dfrac{4U_n + 3 - U_n - 6}{U_n + 6}$

$= \dfrac{3U_n - 3}{U_n + 6} = \dfrac{3(U_n - 1)}{U_n + 6} < 0$ Car $U_n < 1$

- $U_{n+1} + 3 = \dfrac{4U_n + 3}{U_n + 6} + 3$

$= \dfrac{4U_n + 3 + 3U_n + 18}{U_n + 6}$

$= \dfrac{7U_n + 21}{U_n + 6} = \dfrac{7(U_n + 3)}{U_n + 6} > 0$,car $U_n > -3$

D'où : $-3 < U_{n+1} < 1$

Conclusion :

$\forall n \in \square$: $-3 < U_n < 1$

2) $\forall n \in \square$ on a :

$U_{n+1} - U_n = \dfrac{4U_n + 3}{U_n + 6} - U_n$

$= \dfrac{4U_n + 3 - U_n^2 - 6U_n}{U_n + 6}$

$= \dfrac{-U_n^2 - 2U_n + 3}{U_n + 6}$

Or : $-U_n^2 - 2U_n + 3 = -(U_n - 1)(U_n + 3)$

(Car $a + b + c = 0 \Leftrightarrow U_n = 1$ ou $U_n = -3$)

D'où :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-\overbrace{(U_n - 1)}^{(-)}\overbrace{(U_n + 3)}^{(+)}}{U_n + 6}$$

Alors : $U_{n+1} - U_n \geq 0, \forall n \in \square$

3) soit $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 3}$.

a) $\forall n \in \square$:

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1} + 3} = \frac{\dfrac{4U_n + 3}{U_n + 6} - 1}{\dfrac{4U_n + 3}{U_n + 6} + 3}$$

$$= \frac{\dfrac{4U_n + 3 - U_n - 6}{U_n + 6}}{\dfrac{4U_n + 3 + 3U_n + 18}{U_n + 6}} = \frac{3U_n - 3}{7U_n + 21}$$

$$V_{n+1} = \frac{3(U_n - 1)}{7(U_n + 3)} = \frac{3}{7}\left(\frac{U_n - 1}{U_n + 3}\right)$$

D'où : $\forall n \in \square$: $V_{n+1} = \dfrac{3}{7} V_n$

Par suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{3}{7}$

de premier terme : $V_0 = \dfrac{U_0 - 1}{U_0 + 3}$

$\Rightarrow V_0 = \dfrac{-1 - 1}{-1 + 3} = \dfrac{-2}{2} = -1$

Donc : $\boxed{q = \frac{3}{7} et V_0 = -1}$

b) $V_n = V_0 . q^n = (-1) \times \left(\dfrac{3}{7}\right)^n$

D'où $\boxed{V_n = V_0 . q^n = -\left(\dfrac{3}{7}\right)^n, \forall n \in \square}$

On sait que : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 3}$

$\Leftrightarrow (U_n + 3) V_n = Un - 1$

$\Leftrightarrow U_n V_n - U_n = -3V_n - 1$

$\Leftrightarrow U_n (V_n - 1) = -3(V_n - 1)$

$\Leftrightarrow U_n = \dfrac{-3(V_n - 1)}{V_n - 1}$

$\Leftrightarrow U_n = \dfrac{3.\left(\frac{3}{7}\right)^n - 1}{-\left(\frac{3}{7}\right)^n - 1} = \dfrac{1 - 3.\left(\frac{3}{7}\right)^n}{1 + \left(\frac{3}{7}\right)^n}$

Conclusion :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ :\ \boxed{U_n=\frac{3.\left(\frac{3}{7}\right)^n-1}{-\left(\frac{3}{7}\right)^n-1}=\frac{1-3.\left(\frac{3}{7}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{7}\right)^n}}$$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=0$ car $-1<q<1$

d)*/ $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}V_n=V_0\times\frac{1-q^n}{1-q}$

$$=(-1)\times\frac{1-\left(\frac{3}{7}\right)^n}{1-\frac{3}{7}}$$

$$=\frac{\left(\frac{3}{7}\right)^n-1}{\frac{7-3}{7}}=\frac{7}{4}\left(\left(\frac{3}{7}\right)^n-1\right)$$

D'où : $\boxed{S_n=\frac{7}{4}\left(\left(\frac{3}{7}\right)^n-1\right)}$

*/ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7}{4}\left(\underbrace{\left(\frac{3}{7}\right)^n}_{\to 0}-1\right)=-\frac{7}{4}$

Exercice 2

$$\begin{cases}U_0=1\\ U_{n+1}=\dfrac{4}{4-U_n},\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1) a) par récurrence :

* pour $n=0$ on a : $U_0=1\le 2$ (vrai)

* supposons que $U_n\le 2$

et montrons que $U_{n+1}\le 2$

En effet :

$U_n\le 2\Leftrightarrow -U_n\ge -2$

$$\Leftrightarrow 4-U_n\ge 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4-U_n}\le\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{4-U_n}\le\frac{4}{2}=2$$

D'où : $U_{n+1}\le 2$

Par suite $\forall n\in\mathbb{N}\ :U_n\le 2$

b) $U_{n+1}-U_n=\frac{4}{4-U_n}-U_n$

$$=\frac{4-4U_n+U_n^2}{4-U_n}$$

$$=\frac{(U_n-2)^2}{4-U_n}$$

Comme $U_n\le 2$ on a $4-U_n\ge 0$

D'où $U_{n+1}-U_n\ge 0$ et par suite

(U_n) est une suite croissante.

c/ */ la suite (U_n) étant croissante et majorée par 2 donc elle converge vers un réel ℓ

•/ on a :

*/ $U_{n+1}=f(U_n)$ avec $f(x)=\frac{4}{4-x}$

*/ (U_n) converge vers $l\le 2$

*/ f est continue en l

Car $]-\infty,2]\subset\mathbb{R}\setminus\{4\}$ d'où $f(\ell)=\ell$

$$\Leftrightarrow\frac{4}{4-\ell}=\ell\Leftrightarrow 4=4\ell-\ell^2\Leftrightarrow\ell^2-4\ell+4=0$$

$$\Leftrightarrow(\ell-2)^2=0\Leftrightarrow\ell=2$$

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=2}$

2) $V_n=\frac{1}{U_n-2}$

a/ $\forall n\in\mathbb{N}$ on a :

$V_{n+1}=\frac{1}{U_{n+1}-2}$

Or $U_{n+1}-2=\frac{4}{4-U_n}-2=\frac{4-8+2U_n}{4-U_n}$

$$U_{n+1}-2=\frac{-4+2U_n}{4-U_n}=\frac{2(U_n-2)}{4-U_n}$$

Donc :

$$V_{n+1}=\frac{4-U_n}{2(U_n-2)}=\frac{2-U_n}{2(U_n-2)}+\frac{2}{2(U_n-2)}$$

$$=-\frac{1}{2}+V_n$$

Donc (V_n) est une suite arithmétique

de raison $r=-\frac{1}{2}$

b/*/ (V_n) est une suite arithmétique

de raison $r=-\frac{1}{2}$ et de premier terme

$$V_0=\frac{1}{U_0-2}=\frac{1}{1-2}=\frac{1}{-1}=-1$$

Donc :

$$V_n=V_0+nr=-1-\frac{1}{2}n$$

Donc $\forall n\in\square$: $\boxed{V_n=-1-\frac{1}{2}n}$

*/ $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(-1-\frac{1}{2}n)=-\infty$

c/ on sait que : $V_n=\frac{1}{U_n-2}$

Donc $U_n-2=\frac{1}{V_n}$ d'où :

$$U_n=\frac{1}{V_n}+2\Leftrightarrow U_n=\frac{-1}{1+\frac{n}{2}}+2\quad\forall n\in\square$$

$$\Leftrightarrow U_n=\frac{-1}{\frac{2+n}{2}}+2=\frac{-2}{2+n}+2$$

$\forall n\in\square$: $\boxed{U_n=\frac{-2}{2+n}+2}$

d/ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2}{n+2}+2=0+2=2$.

Exercice 3

$$\begin{cases}U_0=0\\U_{n+1}=\sqrt{6+U_n},n\in\square\end{cases}$$

1) a/*/ pour $n=0$ on a : $0\le U_0=0\le 3$ vrai

*/ supposons que $0\le U_n\le 3$

et montrons que $0\le U_{n+1}\le 3$

On a : $0\le U_n\le 3\Leftrightarrow 3\le U_n+6\le 9$

$\Leftrightarrow 0\le\sqrt{3}\le\sqrt{U_n+6}\le\sqrt{9}$

$\Leftrightarrow 0\le U_{n+1}\le 3$

Donc $\forall n\in\square$: $0\le U_n\le 3$

b/ $\forall n\in\square$

$$U_{n+1}-U_n=\sqrt{U_n+6}-U_n$$

$$=\frac{\left(\sqrt{U_n+6}-U_n\right)\times\left(\sqrt{U_n+6}+U_n\right)}{\sqrt{U_n+6}+U_n}$$

$$=\frac{U_n+6-U_n^2}{\sqrt{U_n+6}+U_n}$$

On a :

$U_n+\sqrt{U_n+6}\ge 0$ car $U_n\ge 0$

Étudions donc le signe de $-X^2+X+6$

On a : $-X^2+X+6=0$; $\Delta=1+24=25$

Donc $x'=\frac{-1+5}{-2}=-2$; $x''=\frac{-1-5}{-2}=3$

X	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$-X^2+X+6$	$-$	0	$+\ 0$	$-$

Donc $-X^2+X+6\ge 0$ pour $x\in[-2,3]$

Comme $U_n\in[0,3]\subset[-2,3]$

On aura $-U_n^2+U_n+6\ge 0$ et par suite

$$\frac{U_n+6}{\sqrt{U_n+6}+U_n}-U_n^2\ge 0$$

Conclusion :

$U_{n+1}-U_n\ge 0$ Donc (U_n) est une suite croissante.

c/ */ (U_n) est une suite croissante et majorée par 3

donc (U_n) converge vers $\ell\in[0,3]$

*/ • $U_{n+1}=f(U_n)$ avec $f(x)=\sqrt{x+6}$

• $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\ell$ et $\ell\in[0,3]$

• f Continue en ℓ car $[0,3]\subset[-6,+\infty[$

D'où $f(\ell)=\ell\Leftrightarrow\sqrt{\ell+6}=\ell$

$\Leftrightarrow \ell^2 - \ell - 6 = 0$

D'après 1) b/ on a $\ell = -2$ ou $\ell = 3$

Comme $\ell \geq 0$ alors $\ell = 3$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 3}$

2) a/ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$U_{n+1} - 3 = \sqrt{U_n + 6} - 3$$
$$= \frac{U_n + 6 - 9}{\sqrt{U_n + 6} + 3} = \frac{U_n - 3}{\sqrt{U_n + 6} + 3}$$

Or $\sqrt{U_n + 6} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{U_n + 6} + 3 \geq 3$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{U_n + 6} + 3} \leq \frac{1}{3}$$

Il en résulte :

$$\frac{|U_n - 3|}{\sqrt{U_n + 6} + 3} = \frac{|U_n - 3|}{\sqrt{U_n + 6} + 3} \leq \frac{1}{3}|U_n - 3|$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad |U_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|U_n - 3|$

b/ on a $\forall n \in \mathbb{N}$; $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|U_n - 3|$

Multiplions membre à membre

$$|U_n - 3| \leq \frac{1}{3}|U_{n-1} - 3|$$
$$\times \quad |U_{n-1} - 3| \leq \frac{1}{3}|U_{n-2} - 3|$$
$$\times \quad |U_{n-2} - 3| \leq \frac{1}{3}|U_{n-3} - 3|$$
$$\times \quad \vdots$$
$$|U_1 - 3| \leq \frac{1}{3}|U_0 - 3|$$

$$= |U_n - 3| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |U_0 - 3|$$

Or $|U_0 - 3| = |-3| = 3$

Donc $|U_n - 3| \leq 3.\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $\boxed{|U_n - 3| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$

c/ $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$ car $-1 < \frac{1}{3} < 1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |U_n - 3| = 0$ et par suite :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 3$$

Exercice 4

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{5U_n + 3}{U_n + 3} \end{cases}$$

1) a/ $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$5 - \frac{12}{U_n + 3} = \frac{5(U_n + 3) - 12}{U_n + 3}$$
$$= \frac{5U_n + 15 - 12}{U_n + 3} = \frac{5U_n + 3}{U_n + 3}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = \frac{5U_n + 3}{U_n + 3} = 5 - \frac{12}{U_n + 3}$

b/ i/ pour $n = 0 : 0 \leq U_0 = 1 < 3$ vrai

ii/ supposons que $0 \leq U_n < 3$

et montrons que $0 \leq U_{n+1} < 3$

En effet :

$0 \leq U_n < 3 \Leftrightarrow 3 \leq U_n + 3 < 6$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{U_n + 3} \leq \frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{-12}{3} \leq \frac{-12}{U_n + 3} < \frac{-12}{6}$$
$$\Leftrightarrow 5 - 4 \leq 5 - \frac{-12}{U_n + 3} < 5 - 2$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 \leq 5 - \frac{-12}{U_n + 3} < 3$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \leq U_{n+1} < 3$

Conclusion :

$\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \leq U_n < 3$

c/ $U_{n+1} - U_n = \frac{5U_n + 3}{U_n + 3} - U_n, n \in \mathbb{N}$

$$= \frac{5U_n + 3 - U_n^2 - 3U_n}{U_n + 3}$$

$$= \frac{-U_n^2 + 2U_n + 3}{U_n + 3}$$

Soit le trinôme : $-X^2 + 2X + 3$

On a $a - b + c = 0$ donc

$-X^2 + 2X + 3 = 0 \Leftrightarrow X' = -1, X'' = 3$

Par suite : $-X^2 + 2X + 3 = -(X+1)(X-3)$

D'où : $U_{n+1} - U_n = \frac{-(U_n+1)(U_n-3)}{U_n+3}$

Or on sait que : $U_n + 1 \geq 0, U_n - 3 < 0$

et $U_n + 3 \geq 0$ D'où : $U_{n+1} - U_n > 0$

Donc (U_n) est strictement croissante

Conclusion :

(U_n) est croissante et majorée par 3

d'où (U_n) est convergente.

2) $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n + 1}$

a/ on a :

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 3}{U_{n+1} + 1} = \frac{\frac{5U_n + 3}{U_n + 3} - 3}{\frac{5U_n + 3}{U_n + 3} + 1}$$

$$V_{n+1} = \frac{\frac{5U_n + 3 - 3U_n - 9}{U_n + 3}}{\frac{5U_n + 3 + U_n + 3}{U_n + 3}}$$

$$V_{n+1} = \frac{2U_n - 6}{6U_n + 6} = \frac{2(U_n - 3)}{6(U_n + 1)}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{3} \times \frac{U_n - 3}{U_n + 1} = \frac{1}{3} V_n$$

Donc $\forall n \in \square : V_{n+1} = \frac{1}{3} V_n$.

et par suite (V_n) est une suite géométrique

de raison $q = \frac{1}{3}$.

b/ on a : $V_n = V_0 \times q^n$

Or $V_0 = \frac{U_0 - 3}{U_0 + 1} = \frac{1-3}{1+1} = -1$ donc : $\boxed{V_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

On a : $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n + 1}$

$\Leftrightarrow V_n(U_n + 1) = U_n - 3$

$\Leftrightarrow V_n U_n - U_n = -V_n - 3$

$\Leftrightarrow U_n(V_n - 1) = -V_n - 3$

$\Leftrightarrow U_n = \frac{-V_n - 3}{V_n - 1} = \frac{V_n + 3}{1 - V_n}$

Donc $\forall n \in \square$:

$$\boxed{U_n = \frac{-\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}}$$

c/ (V_n) est une suite géométrique

de raison $q = \frac{1}{3} \in]-1,1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{-\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = 3$$

3) $W_n = U_n - 3$

On a : $W_{n+1} = U_{n+1} - 3$

$$= \frac{5U_n + 3}{U_n + 3} - 3 = \frac{5U_n + 3 - 3U_n - 9}{U_n + 3}$$

$$= \frac{2U_n - 6}{U_n + 3} = \frac{2(U_n - 3)}{U_n + 3}$$

Donc $|W_{n+1}| = \left|\frac{2(U_n - 3)}{U_n + 3}\right|$

$$= \frac{2}{|U_n + 3|} |U_n - 3|$$

$$= \frac{2}{U_n + 3} |U_n - 3|, U_n + 3 \geq 0$$

$$= \frac{2}{U_n + 3} |W_n|$$

Or $U_n \geq 0 \Leftrightarrow U_n + 3 \geq 3$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{U_n+3} \le \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{U_n+3} \le \frac{2}{3}$$

Donc : $|W_{n+1}| \le \frac{2}{3}|W_n|. \forall n \in \mathbb{N}$

b/ Montrer le résultat par récurrence :

*/ $n=0 : |W_0| = |U_0 - 3| = |-2|$

$= 2 \le 2.\left(\frac{2}{3}\right)^0$ car $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$

Donc le résultat est vrai pour $n=0$

*/ supposons que $|W_n| \le 2.\left(\frac{2}{3}\right)^n$

et montrons que $|W_{n+1}| \le 2.\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

En effet :

$|W_{n+1}| \le \frac{2}{3}|W_n|$ et $|W_n| \le 2.\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Donc $|W_{n+1}| \le \frac{2}{3} \times 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow |W_{n+1}| \le 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

Conclusion :

$\forall n \in \mathbb{N} : |W_n| \le 2.\left(\frac{2}{3}\right)^n$

c/ $\lim\limits_{n \to +\infty} 2.\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - 3) = 0$

Par suite : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 3}$

Exercice 5

$$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = 1 + \sqrt{U_n - 1}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1)a/ Montrons le résultat par récurrence :

i) pour $n=0$ on a : $1 < U_0 = \frac{3}{2} < 2$ Vrai

ii) supposons que : $1 < U_n < 2$

et montrons que : $1 < U_{n+1} < 2$

En effet :

$1 < U_n < 2 \Leftrightarrow 0 < U_n - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{U_n - 1} < 1$

$\Leftrightarrow 1 < 1 + \sqrt{U_n - 1} < 2$

Donc $1 < U_{n+1} < 2$

Conclusion :

$\forall n \in \mathbb{N} : 1 < U_n < 2$

b/ on a : $\forall n \in \mathbb{N}$:

$U_{n+1} - U_n = 1 + \sqrt{U_n - 1} - U_n$

$= \sqrt{U_n - 1} - (U_n - 1)$

$= \sqrt{U_n - 1}\left(1 - \sqrt{U_n - 1}\right)$

On a : $U_n < 2 \Rightarrow U_n - 1 < 1 \Rightarrow \sqrt{U_n - 1} \le 1$

D'où $1 - \sqrt{U_n - 1} \ge 0$

et on sait que $\sqrt{U_n - 1} \ge 0$

D'où $\sqrt{U_n - 1}\left(1 - \sqrt{U_n - 1}\right) \ge 0$

et par suite $U_{n+1} - U_n \ge 0$

ce qui donne : (U_n) est une suite croissante.

c/ (U_n) est une suite croissante et majorée par 2 donc (U_n) est une suite convergente et elle converge vers $\ell \in [1,2]$.

On a aussi : $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$

f est continue sur $[1, +\infty[$

et $[1,2] \subset [1, +\infty[$ d'où f est continue en ℓ

Conclusion : $f(\ell) = \ell$

$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow 1 + \sqrt{\ell - 1} = \ell \Leftrightarrow \sqrt{\ell - 1} = \ell - 1$

$\Leftrightarrow \ell - 1 = \ell^2 - 2\ell + 1 \Leftrightarrow \ell^2 - 3\ell + 2 = 0$

On a $a + b + c = 0$ d'où $\ell = 1$ ou $\ell = 2$.

Comme (U_n) est croissante on a :

$U_n > U_0 = \frac{3}{2} \Rightarrow \ell \ge \frac{3}{2}$

Finalement $\ell = 2$ d'où : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 2}$

2) $V_n = \ln(U_n - 1)$

a/ $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_{n+1} = \ln(U_{n+1} - 1)$

$= \ln\left(1 + \sqrt{U_n - 1} - 1\right) = \ln\left(\sqrt{U_n - 1} - 1\right)$

$= \frac{1}{2}\ln(U_n - 1), \ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x = \frac{1}{2}V_n$

et par suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$

b/ (V_n) est une suite géométrique de raison

$\frac{1}{2}\in]-1,1[\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} V_n = 0}$

On a : $V_n = \ln(U_n - 1)$

$\Leftrightarrow e^{V_n} = U_n - 1 \Leftrightarrow U_n = e^{V_n} + 1$

D'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} e^{V_n} + 1 = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = 2}$$

Exercice 6

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}; x\in\mathbb{R}$$

$$U_n = \frac{1}{n}\int_0^n f(x+\ln x)\,dx, n\in\mathbb{N}^*$$

a/ $f(x+\ln x) = \frac{e^{x+\ln x}}{1+e^{x+\ln x}} = \frac{e^x \times e^{\ln x}}{1+e^x \times e^{\ln x}}$

Or on sait que $e^{a+b} = e^a.e^b, a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}$

et que : $e^{\ln r} = r, r > 0$

Finalement $f(x+\ln x) = \frac{xe^x}{1+xe^x}$

b/ $U_n = \frac{1}{n}\int_0^n f(x+\ln x)\,dx$

$$= \frac{1}{n}\int_0^n \frac{xe^x}{1+xe^x}dx = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{(1+xe^x)'}{1+xe^x}dx$$

$$= \frac{1}{n}\left[\ln(1+xe^x)\right]_0^n = \frac{1}{n}\left[\ln(1+ne^n) - \ln(1+n)\right]$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\boxed{U_n = \frac{\ln(1+ne^n)}{n} - \frac{\ln(1+n)}{n}}$

c/ */ $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+ne^n)}{n} = ?$

On a:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+xe^x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left[xe^x\left(\frac{1}{xe^x}+1\right)\right]}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln e^x}{x} + \frac{\ln\left(\frac{1}{xe^x}+1\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} + 1 + \frac{\ln\left(\frac{1}{xe^x}+1\right)}{x} = 0+1+0 = 1$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+ne^n)}{n} = 1$

*/ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X-1}, X = x+1$

$$= \lim_{X\to+\infty} \frac{\frac{\ln X}{X}}{\frac{X-1}{X}} = \frac{0}{1} = 0$$

D'où : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+n)}{n} = 0$

d/ $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+ne^n)}{n} - \frac{\ln(1+n)}{n} = 1$

Exercice 7

$$n\in\mathbb{N}^*,\ V_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

a/ $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\mathbb{N}^*$ on a :

$$n \geq p \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq \sqrt{p} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{p}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

b/ on a: $\forall n \geq 1$

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}} \geq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow V_n \geq n \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^* : V_n \geq \sqrt{n}$

c/ on a: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $V_n \geq \sqrt{n}$

Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty}$

Exercice 8

$f(x)=\ln(x+3), x\in]-3,+\infty[$

1) $f'(x)=\dfrac{1}{x+3}>0$

T.V:

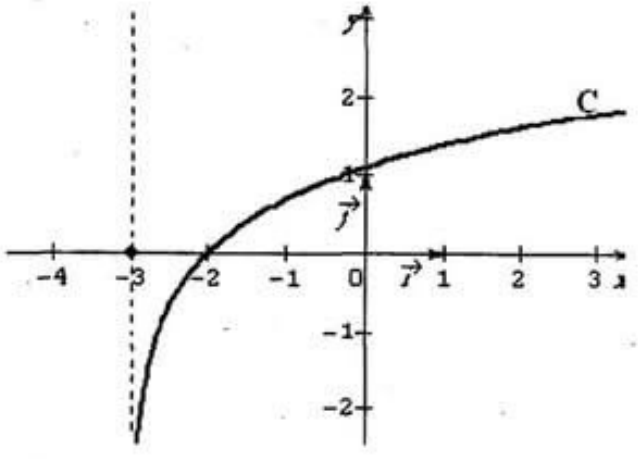
x	-3	$+\infty$
$f(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to(-3)^+} f(x)=\lim_{x\to(-3)^+}\ln(x+3)$$
$$=\lim_{X\to 0^+}\ln X=-\infty,(X=x+3)$$
$$\lim_{x\to+\infty}\ln(x+3)=\lim_{X\to+\infty}\ln X=+\infty,(X=x+3)$$

On a:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+3)}{x}=\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X-3},(X=x+3)$$
$$=\lim_{X\to+\infty}\frac{\frac{\ln X}{X}}{\frac{X-3}{X-3}}=\frac{0}{1}=0$$

Donc (C) admet une branche infinie parabolique de direction $(o,\vec{i})$.



2) $h(x)=f(x)-x, x\in]-3,+\infty[$

$$h'(x)=f'(x)-1=\frac{1}{x+3}-1=\frac{-x-2}{x+3}<0$$

Pour tout $x\in]1,2[$: h est continue et strictement décroissante donc h est une bijection de $]1,2[$ sur $]h(2),h(1)[=]\ln 5-2,\ln 4-1[$

Or : $\ln 5-2\approx -0,39$; $\ln 4-1\approx 0,386$

Donc $0\in]\ln 5-2,\ln 4-1[$ et par suite $h(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in]1,2[$.

3)

$$\begin{cases}U_0=1\\ U_{n+1}=f(U_n), n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

a/ par récurrence sur $\mathbb{N}$:

i) pour $n=0$ on a $1\le U_0=1\le 2$ Vrai

ii) supposons que $1\le U_n\le 2$ et montrons que $1\le U_{n+1}\le 2$ En effet on a :

$1\le U_n\le 2$ et f est croissante sur $[1,2]$

Donc $f(1)\le f(U_n)\le f(2)$

Avec : $f(1)=\ln 4\approx 1,38\ge 1$

$f(2)=\ln 5\approx 1,609\le 2$

Donc $1\le U_{n+1}\le 2$

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}: 1\le U_n\le 2$

b/ montrons par récurrence que $U_n\le U_{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}$

i) pour $n=0$ on a :

$U_0=1$ et $U_1=f(U_0)=f(1)=\ln 4$

et $1\le\ln 4\Rightarrow U_0\le U_1$ Vrai

ii) supposons que $U_{n-1}\le U_n$ et montrons que $U_n\le U_{n+1}$ en effet on a :

$U_{n-1}\le U_n$ et f est croissante sur $[1,2]$

et $U_n\in[1,2], \forall n\in\mathbb{N}$

Donc $f(U_{n-1})\le f(U_n)\Leftrightarrow U_n\le U_{n+1}$

D'où (U_n) est une suite croissante et majorée par 2 donc (U_n) converge vers un réel ℓ

Calcul de ℓ : on a :

i) $U_{n+1} = f(U_n)$

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell \in [1,2]$

iii) f continue en ℓ car $[1,2] \subset]-3,+\infty[$

Donc $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow f(\ell) - \ell = 0$

$\Leftrightarrow f(\ell) = 0$ D'où $\boxed{\ell = \alpha}$

Exercice 9

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 1}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) a/ par récurrence sur $\mathbb{N}$

i) $n = 0 : 1 \le U_0 = 1 \le \sqrt{2}$ vrai

ii) supposons que $1 \le U_n \le \sqrt{2}$

et montrons que $1 \le U_{n+1} \le \sqrt{2}$

En effet on a : $1 \le U_n \le \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow 1 \le U_n^2 \le 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}U_n^2 \le 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \le \frac{1}{2}U_n^2 + 1 \le 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{3}{2}} \le \sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 1} \le \sqrt{2}$$

Or $\sqrt{\frac{3}{2}} \ge \sqrt{1} = 1$ donc $1 \le U_{n+1} \le \sqrt{2}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \le U_n \le \sqrt{2}$

b/ on a : $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 1} - U_n$$

$$= \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 1} - U_n\right)\left(\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 1} + U_n\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 1} + 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}U_n^2 + 1 - U_n^2}{\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 1} + 1} = \frac{1 - \frac{1}{2}U_n^2}{\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 1} + 1}$$

$$= \frac{2 - U_n^2}{2\left[\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 1} + 1\right]} = \frac{\left(\sqrt{2} - U_n\right)\left(\sqrt{2} - U_n\right)}{2\left[\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 1} + 1\right]}$$

Or on sait que $1 \le U_n \le \sqrt{2}$

Donc $\sqrt{2} - U_n \ge 0$ et $\sqrt{2} + U_n \ge 0$

et $2\left[\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 1} + 1\right] \ge 0$ et par suite $U_{n+1} - U_n \ge 0$

Finalement : (U_n) est une suite croissante.

c/ (U_n) est une suite croissante et majorée par $\sqrt{2}$ donc (U_n) est une suite convergente.

2) $V_n = U_n^2 - 2, n \in \mathbb{N}$

a/ $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$V_{n+1} = U_{n+1}^2 - 2 = \sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 1}^2 - 2$$

$$= \frac{1}{2}U_n^2 + 1 - 2 = \frac{1}{2}U_n^2 - 1$$

$$= \frac{1}{2}\left(U_n^2 - 2\right)$$

$V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$ Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $V_0 = U_0^2 - 2 = -1$.

b/ on a : $V_n = V_0.q^n$ donc $\boxed{V_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n} n \in \mathbb{N}$

Aussi on a : $V_n = U_n^2 - 2$ donc $U_n^2 = V_n + 2$

C'est-à-dire $U_n = \sqrt{V_n + 2}, n \in \mathbb{N}$

D'où $\boxed{U_n = \sqrt{-\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}, n \in \mathbb{N}}$

c/ */ on a (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2} \in]-1,1[$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$

*/ $U_n = \sqrt{V_n + 2}$ d'où

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{V_n + 2} = \sqrt{2}$

d/ $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} U_K^2 = \sum_{K=0}^{K=N} (V_k + 2)$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} V_k + 2(n+1)$$

$$= V_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + 2(n+1)$$

$$= (-1) \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} + 2(n+1)$$

$$\boxed{S_n = -2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+2(n+1)}$$

e/ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+2\left(\frac{(n+1)}{n}\right)$

$= 0+2=2$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 2}$

Exercice 10

$K_n = \int_0^1 (x+1)e^{-nx}dx, I = \int_0^1 xe^{-x}$

1) a/*/ $K_0 = \int_0^1 (x+1)dx = \left[\frac{(x+1)^2}{2}\right]_0^1$

$= 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Donc $\boxed{K_0 = \frac{3}{2}}$

*/ $I = \int_0^1 xe^{-x}dx$: par parties:

$U(x) = x \to U'(x) = 1$

$V'(x) = e^{-x} \to V(x) = -e^{-x}$

$I = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-e^{-x}\right)dx$

$= -e^{-1} - \left[e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1} - \left[e^{-1}-1\right]$

$= -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - 2e^{-1}$

Donc $\boxed{I = 1-\frac{2}{e}}$

*/ on a : $K_1 = \int_0^1 (1+x)e^{-x}dx$

$K_1 - I = \int_0^1 (1+x)e^{-x}dx - \int_0^1 xe^{-x}dx$

$= \int_0^1 \left(e^{-x} + xe^{-x} - xe^{-x}\right)dx$

$= \int_0^1 e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1$

$= -e^{-1} + 1 = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$

Donc : $\boxed{K_1 - I = 1-\frac{1}{e}}$

$K_1 - I = 1-\frac{1}{e} \Rightarrow K_1 = I + 1 - \frac{1}{e} = 1-\frac{2}{e}+1-\frac{1}{e}$

Il en résulte : $\boxed{K_1 = 2-\frac{3}{e}}$

b/ $K_{n+1} - K_n =$

$\int_0^1 (1+x)e^{-(n+1)x}dx - \int_0^1 (1+x)e^{-nx}dx, n \in \mathbb{N}$

$= \int_0^1 (1+x)e^{-nx}\left[e^{-x}-1\right]dx$

On a : $0 \le x \le 1 \Leftrightarrow -1 \le -x \le 0$

$\Leftrightarrow e^{-1} \le e^{-x} \le 1$ Donc $e^{-x}-1 \le 0$

et $(1+x)e^{-nx} \ge 0$ donc

$(1+x)e^{-nx}\left(e^{-x}-1\right) \le 0$

$\Rightarrow \int_0^1 \overbrace{(1+x)}^{+} e^{-nx}\left(e^{-x}-1\right)dx \le 0$

D'où $K_{n+1} - K_n \le 0$ ce qui prouve que (K_n) est une suite décroissante.

c/ on a : $(1+x)e^{-(nx)} \ge 0$ et

$\int_0^1 (1+x)e^{-nx}dx \ge 0 \Rightarrow K_n \ge 0$ D'où (K_n) est une suite décroissante et minorée par 0 d'où elle est convergente.

2) a/ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \le x \le 1$

$\Leftrightarrow 1 \le x+1 \le 2$ et $e^{-nx} \ge 0$

$\Leftrightarrow \boxed{e^{-nx} \le (1+x)e^{-nx} \le 2e^{-nx}}$

b/ on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \in [0,1]$

$(E) : e^{-nx} \le (1+x)e^{-nx} \le 2e^{-nx}$

En intégrant les trois membres de l'inégalité (E)

On obtient : $\int_0^1 e^{-nx}dx \le K_n \le \int_0^1 2e^{-nx} \Leftrightarrow$

$\int_0^1 e^{-nx}dx \le K_n \le 2\int_0^1 e^{-nx}$

Or $\int_0^1 e^{-nx}dx = \left[\frac{-e^{-nx}}{n}\right]_0^1 = \left[-\frac{e^{-n}}{n}+\frac{1}{n}\right] = \frac{1-e^{-n}}{n}$

D'où : $\frac{1-e^{-n}}{n} \le K_n \le 2\left(\frac{1-e^{-n}}{n}\right)$

c/ on a : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1-e^{-n}}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{ne^n} = 0$

D'où : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} K_n = 0}$

Exercice 11

$n\in\mathbb{N} : J_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t}dt$

1) a/*/ $J_0 + J_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^t}dt + \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}dt$

$= \int_0^1\left(\frac{1}{1+e^t}+\frac{e^t}{1+e^t}\right)dt = \int_0^1\left(\frac{1+e^t}{1+e^t}\right)dt = \int_0^1 dt = 1$

*/ $J_1 = \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}dt = \int_0^1 \frac{(1+e^t)'}{1+e^t}dt$

$= \left[\ln(1+e^t)\right]_0^1 = \ln(1+e) - \ln 2$ $\boxed{J_1 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$

On a: $J_0 + J_1 = 1 \Leftrightarrow J_0 = 1 - J_1$

D'où : $\boxed{J_0 = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$

b/ $\forall n\in\mathbb{N}$ on a: $(n+1)t \ge nt, t\in[0,1]$

$\Leftrightarrow e^{(n+1)t} \ge e^{nt} \Leftrightarrow \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t} \ge \frac{e^{nt}}{1+e^t}$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t} \ge \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t}$

D'où $J_{n+1} \ge J_n$ et par suite (J_n) est croissante

2) on a : $0 \le t \le 1 \Leftrightarrow 1 \le e^t \le e$

$\Leftrightarrow 1 \le e^t \le e \Leftrightarrow 2 \le 1+e^t \le 1+e, e+1 \le 4$

$\Leftrightarrow 2 \le 1+e^t \le 4$

et par suite $\frac{1}{4} \le \frac{1}{e^t+1} \le \frac{1}{2}, \forall t\in[0,1]$

b/ on a : $\forall n\in\mathbb{N}, \forall t\in[0,1]$ $\frac{e^{nt}}{4} \le \frac{e^{nt}}{1+e^t} \le \frac{e^{nt}}{2}$

Intégrant les trois membres de l'inégalité on trouve :

$\int_0^1 \frac{e^{nt}}{4}dt \le J_n \le \int_0^1 \frac{e^{nt}}{2}dt \Leftrightarrow \frac{1}{4}\int_0^1 e^{nt}dt \le J_n \le \frac{1}{2}\int_0^1 e^{nt}dt$

Or $\int_0^1 e^{nt}dt = \left[\frac{e^{nt}}{n}\right]_0^1 = \frac{e^n}{n} - \frac{1}{n}$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$: $\frac{1}{4}\left(\frac{e^n}{n}-\frac{1}{n}\right) \le J_n \le \frac{1}{2}\left(\frac{e^n}{n}-\frac{1}{n}\right)$

c/ $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{e^n}{n}-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}\times\frac{e^n}{n}-\frac{1}{n} = +\infty$

et $J_n \ge \frac{1}{4}\left(\frac{e^n}{n}-\frac{1}{n}\right)$ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = +\infty}$

($\frac{e^n}{n} \to +\infty$, $\frac{1}{n} \to 0$)

Exercice 12

$0 < U_0 < V_0$, $\begin{cases} U_nV_n = U_0V_0 \\ V_n = \frac{1}{2}(U_{n-1}+V_{n-1}), n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$

1)i) pour $n=0$

$U_0 > 0$ et $V_0 > U_0 > 0$ Vrai

ii) supposons que $U_n > 0$ et $V_n > 0$

et montrons que $U_{n+1} > 0$ et $V_{n+1} > 0$

en effet : $V_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n+V_n) > 0$ car $U_n + V_n > 0$

Aussi on a : $U_{n+1}V_{n+1} = U_0V_0 > 0$

et $V_{n+1} > 0$ donc $U_{n+1} > 0$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$: $U_n > 0$ et $V_n > 0$

2) a/ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ on a :

$$(V_n - U_n)V_n = V_n^2 - U_nV_n$$
$$= \frac{1}{4}(U_{n-1} + V_{n-1})^2 - U_{n-1}V_{n-1}$$
$$= \frac{1}{4}\left[(U_{n-1} + V_{n-1})^2 - 4U_{n-1}V_{n-1}\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[U_{n-1}^2 + 2U_{n-1}V_{n-1} + V_{n-1}^2 - 4U_{n-1}V_{n-1}\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[U_{n-1}^2 - 2U_{n-1}V_{n-1} + V_{n-1}^2\right]$$
$$= \frac{1}{4}[U_{n-1} - V_{n-1}]^2$$

Donc $V_n(V_n - U_n) = \frac{1}{4}(U_{n-1} - V_{n-1})^2 \geq 0$

Et comme $V_n \geq 0$ on aura $V_n - U_n \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}^*$

et comme $V_0 > U_0$ il résulte: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : U_n < V_n}$

b/ $\forall n \in \mathbb{N}$:

*/ $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2}(U_n + V_n) - V_n$

$$= \frac{1}{2}(U_n + V_n - 2V_n)$$
$$= \frac{1}{2}(U_n - V_n) \leq 0$$

Car $U_n < V_n$ donc la suite (V_n) est décroissante.

*/ $\forall n \in \mathbb{N}$ on sait que $V_{n+1} \leq V_n$

Donc $V_{n+1}U_n \leq U_nV_n$ car $U_n \geq 0$

et puisque $V_nU_n = U_{n+1}V_n$

On aura $V_{n+1}U_n \leq U_nV_n$

D'où $V_{n+1}U_{n+1} - U_nV_{n+1} \geq 0 \Leftrightarrow V_{n+1}(U_{n+1} - U_n) \geq 0$

et $V_{n+1} > 0$ donc $U_{n+1} - U_n \geq 0$

ce qui prouve que la suite (U_n) est croissante.

3)*/ Convergence de (V_n) : on a:

$\forall n \in \mathbb{N} : V_n > U_n$

et la suite (U_n) est croissante

Donc $U_n > U_0$ d'où $V_n > U_0$

(V_n) est une suite décroissante et minorée par V_0 donc (V_n) est convergente.

*/ Convergence de (U_n) :

(V_n) est décroissante donc majorée par son premier terme c'est-à-dire $V_n < V_0$ et $U_n < V_n$

Donc : $U_n < V_0$ donc (U_n) est croissante et majorée par V_0 donc c'est une suite convergente.

4) a/ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $V_n - U_n = \frac{1}{2}(V_{n-1} + U_{n-1}) - U_n$

$$= \frac{1}{2}(V_{n-1} + U_{n-1} - 2U_n)$$

Et puisque $U_n > U_{n-1}$ donc $-2U_n < -2U_{n-1}$

Donc $V_{n-1} + U_{n-1} - 2U_n < V_{n-1} + U_{n-1} - 2U_n$

Par suite $V_n - U_n < \frac{1}{2}(V_{n-1} - U_{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}^*$

"Multiplions membre à membre "

$$\begin{cases} 0 < V_n - U_n < \frac{1}{2}(V_{n-1} + U_{n-1}) \\ \times\ 0 < V_{n-1} + U_{n-1} < \frac{1}{2}(V_{n-2} - U_{n-2}) \\ \times\ 0 < V_{n-2} + U_{n-2} < \frac{1}{2}(V_{n-3} + U_{n-3}) \\ \times\ \vdots \\ 0 < V_1 + U_1 < \frac{1}{2}(V_0 - U_0) \end{cases}$$

$$= 0 < V_n - U_n < (\frac{1}{2})^n (V_0 - U_0)$$

b/ $\Leftrightarrow 0 \leq V_n - U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (V_0 - U_0)$ et

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (V_0 - U_0) = 0$ donc : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} (V_n - U_n) = 0}$

On a : $\lim_{n \to +\infty} (V_n - U_n) = 0$ et

(U_n) et (V_n) sont convergentes donc

$\lim_{n \to +\infty} V_n - \lim_{n \to +\infty} U_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} U_n = \ell$

c/ on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_nV_n = U_0V_0$

Donc $\lim_{n \to +\infty} U_nV_n = U_0V_0 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n^2 = U_0V_0$

et $U_n > 0$ d'où :

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = \sqrt{U_0 V_0};\ \lim_{n\to+\infty} V_n = \sqrt{U_0 V_0}}$

Exercice 13

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{\sqrt{1+U_n^2}} \end{cases}$$

1) a/ par récurrence

i) pour $n=0 : 0 \le U_0 = 0 \le 1$ vrai

ii) supposons que $0 \le U_n \le 1$

et montrons que $0 \le U_{n+1} \le 1$

En effet $U_n \ge 0$ donc $\dfrac{U_n}{\sqrt{1+U_n^2}} \ge 0$

d'où $U_{n+1} \ge 0$ Aussi on a:

$$U_{n+1} - 1 = \frac{U_n}{\sqrt{1+U_n^2}} - 1$$

$$= \frac{U_n - \sqrt{1+U_n^2}}{\sqrt{1+U_n^2}} = \frac{U_n^2 - \sqrt{1+U_n^2}^2}{\sqrt{1+U_n^2}\left(U_n - \sqrt{1+U_n^2}\right)}$$

$$= \frac{U_n^2 - \left(1+U_n^2\right)}{\sqrt{1+U_n^2}\left(U_n - \sqrt{1+U_n^2}\right)}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1+U_n^2}\left(U_n - \sqrt{1+U_n^2}\right)}$$

Comme $\sqrt{1+U_n^2}\left(U_n - \sqrt{1+U_n^2}\right) \ge 0$

On aura $U_{n+1} - 1 \le 0$ donc

$U_{n+1} \le 1$ D'où $0 \le U_{n+1} \le 1$

Conclusion:

$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \le U_n \le 1$

b/ $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n}{\sqrt{1+U_n^2}} - U_n = U_n\left(\frac{1}{\sqrt{1+U_n^2}} - 1\right)$$

On sait que $1 + U_n^2 \ge 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+U_n^2} \ge 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+U_n^2}} \le 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+U_n^2}} - 1 \le 0$$

et comme $U_n \ge 0$ on aura: $U_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+U_n^2}} - 1\right) \le 0$

Ce qui donne $U_{n+1} - U_n \le 0$ d'où (U_n) est une Suite décroissante.

c/ (U_n) est une suite décroissante et minorée par 0 d'où (U_n) est convergente posons $\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$

On a : $f(U_n) = U_{n+1}$ et f continue en

$\ell \in [0,1] \subset \mathbb{R}$ puisque $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \dfrac{\ell}{\sqrt{1+\ell^2}} = \ell \Leftrightarrow \dfrac{\ell^2}{1+\ell^2} = \ell^2$

$$\Leftrightarrow \frac{\ell^2}{1+\ell^2} - \ell^2 = 0 \Leftrightarrow \ell^2\left(\frac{1}{1+\ell^2} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell^2\left(\frac{1-1-\ell^2}{1+\ell^2}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\ell^4}{1+\ell^2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ell = 0}$$

Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = 0}$

2) $V_n = \dfrac{1}{U_n^2}, n \in \mathbb{N}$

a/ $V_{n+1} = \dfrac{1}{U_{n+1}^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{U_n}{\sqrt{U_{n+1}^2}}\right)^2}$

$$V_{n+1} = \frac{1}{\dfrac{U_n^2}{1+U_n^2}} = \frac{1+U_n^2}{U_n^2} = \frac{1}{U_n^2} + 1$$

$$V_{n+1} = 1 + V_n$$

Donc (V_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$

b/ */ on a : $V_n = V_0 + nr$

Or $V_0 = \frac{U_0}{\sqrt{1+U_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N} : \boxed{V_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + n}$

*/ on a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$V_n = \frac{1}{U_n^2} \Leftrightarrow U_n^2 = \frac{1}{V_n} \Leftrightarrow \sqrt{U_n^2} = \sqrt{\frac{1}{V_n}} = \frac{1}{\sqrt{V_n}}$$

$$\Leftrightarrow |U_n| = U_n = \frac{1}{\sqrt{V_n}} \text{ Car } U_n \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{U_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} + n}}, n \in \mathbb{N}}$$

*/ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} + n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

c/ $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_n$: Somme de n premier terme d'une suite arithmétique. $S_n = n \times \frac{V_0 + V_{n+1}}{2}$

$$= n \times \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + n - 1}{2} = n \times \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} + n - 1}{2}$$

$$\boxed{S_n = n\left(\frac{\sqrt{2} - 1 + n}{2}\right), n \in \mathbb{N}^*}$$

*/ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2 - n + \sqrt{2}n}{2n^2}$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)}{2n^2} = \frac{1 - 0 + 0}{2}$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n^2} = \frac{1}{2}}$$

Exercice 14

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}; I_n = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt, n \geq 1$$

1) a/ $I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{t^2}{1+t^2}\right) dt = \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^2} dt = \int_0^1 dt = 1$$

*/ comme: $I_0 = \frac{\pi}{4}$

On a : $I_0 + I_1 = 1 \Rightarrow I_1 = 1 - I_0 \Rightarrow I_1 = 1 - \frac{\pi}{4}$

Donc : $\boxed{\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = \frac{4-\pi}{4}}$

b/ $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2} dt + \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} + \frac{t^{2n}}{1+t^2}\right) dt = \int_0^1 \frac{t^{2n}.t^2 + t^{2n}}{1+t^2} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t^{2n}\cancel{\left(t^2+1\right)}}{\cancel{1+t^2}} dt = \int_0^1 t^{2n} dt = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$: $\boxed{I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}}$

c/ on a : $t \in [0,1]$, donc : $t^2 \leq 1$

$$\Leftrightarrow t^2.t^{2n} \leq t^{2n} \Leftrightarrow \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq \frac{t^{2n}}{1+t^2}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt \Leftrightarrow I_{n+1} \leq I_n$$

D'où (I_n) est décroissante

Aussi on a : $\frac{t^{2n}}{1+t^2} \geq 0$ donc $\int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt \geq 0$

Par suite $I_n \geq 0$ donc (I_n) est minorée par 0.

d/ (I_n) décroissante est minorée par 0 d'où c'est une suite convergente.

2) a/ $t\in[0,1]$; $0\le t^2\le 1$

$$\Leftrightarrow 1\le t^2+1\le 2 \Leftrightarrow 0\le\frac{1}{2}\le\frac{1}{t^2+1}\le 1$$

$$\Leftrightarrow 0\le\frac{t^{2n}}{1+t^2}\le t^{2n};t\ge 0$$

Intégrant les trois membres de l'inégalité précédente sur $[0,1]$ on aura :

$$0\le\int_0^1\frac{t^{2n}}{1+t^2}dt\le\int_0^1 t^{2n}dt$$

Or $\int_0^1 t^{2n}dt=\frac{1}{2n+1}$ (d'après 1-b/)

D'où : $0\le I_n\le\frac{1}{2n+1};\forall n\in\mathbb{N}$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}=0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$ d'après le théorème de comparaison.

Exercice 15

$a>0;n\in\mathbb{N}^*$: $I_n(a)=\int_0^a\frac{t^ne^{-t}}{n!}dt$

Avec $n!=n(n-1)\times.....\times 3\times 2\times 1$

1) $I_1(a)=\int_0^a te^{-t}dt$

Intégrant par parties et posons:

$U(t)=t\to U'(t)=1$

$V'(t)=e^{-t}\to V(t)=-e^{-t}$

D'où : $I_1(a)=\left[-te^{-t}\right]_0^a-\int_0^a -e^{-t}dt$

$=-ae^{-a}-\left[e^{-t}\right]_0^a=-ae^{-a}-e^{-a}+1$

$$\boxed{I_1(a)=-(1+a)e^{-a}+1}$$

2) a) $n\in\mathbb{N}^*,\forall t\ge 0$, pour $t\ge 0$ on a: $-t\le 0$

$\Leftrightarrow 0\le e^{-t}\le e^0=1$ et $t^n\ge 0$

$$\Leftrightarrow 0\le t^ne^{-t}\le t^n\Leftrightarrow 0\le\frac{t^ne^{-t}}{n!}\le\frac{t^n}{n!}$$

b) on a: $\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall t\ge 0\quad 0\le\frac{t^ne^{-t}}{n!}\le\frac{t^n}{n!}$

Intégrant les trois membres de cette inégalité

on aura : $0\le\int_0^a\frac{t^ne^{-t}}{n!}dt\le\int_0^a\frac{t^n}{n!}dt$

Or: $\int_0^a\frac{t^n}{n!}dt=\frac{1}{n!}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^a$

$$=\frac{1}{n!}\times\frac{a^{n+1}}{(n+1)}=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ on a : $\boxed{0\le I_n(a)\le\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}$

3) a) $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $I_n(a)=\int_0^a\frac{t^ne^{-t}}{n!}dt$

Posons:

$U(t)=t^n\to U'(t)=nt^{n-1}$

$V'(t)=e^{-t}\to V(t)=-e^{-t}$

$I_n(a)=\frac{1}{n!}\int_0^a t^ne^{-t}dt$

$=\frac{1}{n!}\left[\left[-t^ne^{-t}\right]_0^a-\int_0^a nt^{n-1}\left(-e^{-t}\right)dt\right]$

$=\frac{1}{n!}\left(-a^ne^{-a}\right)+\frac{n}{n!}\int_0^a t^{n-1}e^{-t}dt$

Or: $\frac{n}{n!}=\frac{n}{n(n-1)!}=\frac{1}{(n-1)!}$

Donc $I_n(a)=-\frac{a^ne^{-a}}{n!}+\underbrace{\int_0^a\frac{t^{n-1}e^{-t}}{(n-1)!}dt}_{I_{n-1}(a)}$

Il résulte que: $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $I_n(a)=-\frac{a^ne^{-a}}{n!}+I_{n-1}(a)$

D'où : $I_n(a)-I_{n-1}(a)=-\frac{a^ne^{-a}}{n!}$

b) on a: $-\frac{a^ne^{-a}}{n!}\le 0$ car $a>0$

Donc $I_n(a)\le I_{n-1}(a)$ et par suite $(I_n(a))$ est une suite décroissante et $I_n(a)\ge 0$ d'où $I_n(a)$ est convergente.

c) Démontrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*$:

$$I_n(a)=1-e^{-a}\left(1+\frac{a^1}{1!}+.....+\frac{a^n}{n!}\right)$$

i) Pour $n=1$: $I_1(a)=1-(1+a)e^{-a}$

$$= 1 - e^{-a}\left(1 + \frac{a^1}{1!}\right) \text{ Vrai}$$

II) Supposons que le résultat est vrai à l'ordre n et montrons que :

$$I_{n+1}(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + \frac{a^1}{1!} + \ldots\ldots + \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

En effet: $I_{n+1}(a) - I_n(a) = -\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \times e^{-a}$ d'après 3) a)

Donc on a :

$$I_{n+1}(a) = I_n(a) - \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \times e^{-a}$$

$$I_{n+1}(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + \frac{a^1}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{a^n}{n!}\right) - \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \times e^{-a}$$

$$I_{n+1}(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + \frac{a^1}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{a^n}{n!} + \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

Conclusion:

$\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{I_n(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + \frac{a^1}{1!} + \ldots\ldots + \frac{a^n}{n!}\right)}$$

On suppose que : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n(a) = 0$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} 1 - e^{-a}\left(1 + \frac{a^1}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{a^n}{n!}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} e^{-a}\left(1 + \frac{a^1}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{a^n}{n!}\right) = 1$$

Multiplions par e^a et remarquant que $e^a . e^{-a} = 1$ On trouve:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{a^1}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{a^n}{n!} = e^a}$$

Exercice 16

$$\begin{cases} f(x) = x\ln(1-x) + \frac{1}{4}, & x < 0 \\ f(x) = \frac{e^x}{x^2+4}, & x \geq 0 \end{cases}$$

1) a) */ Continuité en 0 :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x\ln(1-x) + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} = f(0)$$

f est continue à gauche en 0.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x^2+4} = \frac{1}{4} = f(0)$$

f est continue a droite en 0 .

Conclusion :

f est continue en 0 :

*/ Dérivabilité en 0 :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x\ln(1-x) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{x\ln(1-x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \ln(1-x)$$

$$= \ln 1 = 0 = f_g'(0)$$

f est dérivable a gauche en 0.

$$\text{*/ } \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{e^x}{x^2+4} - \frac{1}{4}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{4e^x - 4 - x^2}{4(x^2+4)x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{4(e^x - 1)}{4(x^2+4)x} - \frac{x^2}{4(x^2+4)x}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left[\left(\frac{e^x - 1}{x}\right).\left(\frac{1}{x^2+4}\right) - \frac{x}{4(x^2+4)}\right]$$

$$= 1 \times \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} = f_d'(0)$$

f est dérivable a droite en 0.

Conclusion :

$f_g'(0) \neq f_d'(0)$ Donc f n'est pas dérivable en 0.

b) pour $x < 0$:

$$f'(x)=x'\ln(1-x)+x(\ln(1-x))'$$
$$=\ln(1-x)+x\times\frac{-1}{1-x}$$
$$=\ln(1-x)-\frac{x}{1-x}$$

On a : $x<0\Leftrightarrow -x>0\Leftrightarrow 1-x>1$ donc $\ln(1-x)>0$

D'où : $f'(x)=\ln(1-x)+\frac{-x}{1-x}>0$

Pour $x>0$

$$f'(x)=\frac{(e^x)'(x^2+4)-(x^2+4)'e^x}{(x^2+4)^2}$$
$$=\frac{e^x(x^2+4)-2xe^x}{(x^2+4)^2}=\frac{e^x(x^2-2x+4)}{(x^2+4)^2}$$
$$=\frac{e^x((x-1)^2+3)}{(x^2+4)^2}>0$$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}$, f est strictement croissante

T.V :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	+	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗		$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x\ln(1-x)+\frac{1}{4}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{x^2}}{\frac{x^2+4}{x^2}}=\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

c) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\ln(1-x)}{x}+\frac{1}{4x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\ln(1-x)+\frac{1}{4x}$$
$$=+\infty+0=+\infty$$

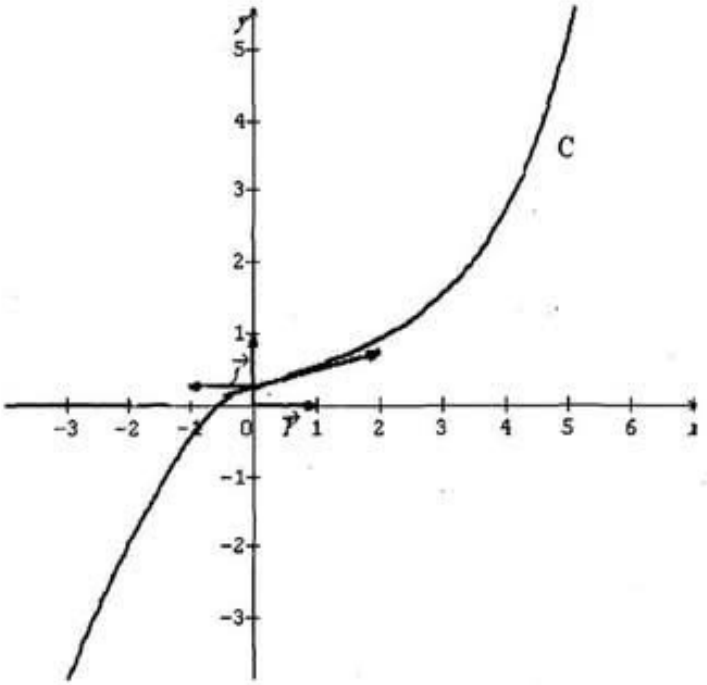
C admet une B.I.P de direction (yy') au voisinage de $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{x^2+4}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3+4x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{x^3}}{\frac{x^3+4x}{x^3}}=+\infty$$

Car $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3+4x}=1$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}=+\infty$

Donc C admet une B.I.P de direction (yy') au voisinage de $+\infty$.

Courbe :



2) a) $x\in[0,1]$ on a :

$$\frac{x^2-2x+4}{(x^2+4)^2}-\frac{1}{4}=\frac{4(x^2-2x+4)-(x^2+4)^2}{4(x^2+4)^2}$$

On sait que $4(x^2+4)^2>0$

et on a :

$4(x^2-2x+4)-(x^2+4)^2$

$=4x^2-8x+16-(x^4+8x^2+16)$

$=4x^2-8x+16-x^4-8x^2-16$

$=-x^4-4x^2-8x\le 0, x>0$

D'où : $\dfrac{x^2-2x+4}{(x^2+4)^2}-\dfrac{1}{4}\le 0$

Par suite : $\dfrac{x^2-2x+4}{(x^2+4)^2}\le\dfrac{1}{4}, x\in[0,1]$

b) $x\in[0,1]: \dfrac{x^2-2x+4}{(x^2+4)^2}\le\dfrac{1}{4}$

D'où on a : $0\le\dfrac{x^2-2x+4}{(x^2+4)^2}\le\dfrac{1}{4}$ et $1\le e^x\le e, x\in[0,1]$

Donc : $0\le\dfrac{e^x(x^2-2x+4)}{(x^2+4)^2}\le\dfrac{e}{4}\le\dfrac{3}{4}$ car $e\le 3$.

Par suite $\forall x\in[0,1]$, $0\le f'(x)\le\dfrac{3}{4}$

3) $x\in[0,1]: g(x)=f(x)-x$

a) $g'(x)=f'(x)-1\le\dfrac{3}{4}-1\le 0$

g est décroissante sur $[0,1]$

T.V :

x	0	α	1
$g'(x)$			
$g(x)$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{e-5}{5}$

$g(0)=f(0)-0=\dfrac{1}{4}$

$g(1)=f(1)-1=\dfrac{e}{5}-1=\dfrac{e-5}{1}$

b) $f(x)=x \Leftrightarrow f(x)-x=0 \Leftrightarrow g(x)=0$

Or la fonction g est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$

Donc g est une bijection de $[0,1]$ sur $\left[\dfrac{e-5}{5},\dfrac{1}{4}\right]$.

et comme $\dfrac{e-5}{5}<0$ on a $0\in\left[\dfrac{e-5}{5},\dfrac{1}{4}\right]$.

Donc l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in[0,1]$.

Conclusion :

L'équation $f(x)=x$ admet une unique solution $\alpha\in[0,1]$.

*/ le signe de $f(x)-x$ est celui de $g(x)$ sur $[0,1]$.

Etude de signe :

D'où : $\begin{cases} x\in[0,\alpha]: f(x)\ge x \\ x\in[\alpha,1]: f(x)\le x \end{cases}$

4)

$\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=f(U_n), n\in\mathbb{N} \end{cases}$

a) par récurrence :

i) pour $n=0$ on a : $\alpha\le U_0=1\le 1$ car $\alpha\in[0,1]$

Donc vrai pour $n=0$

ii) supposons que $0\le U_n\le 1$

et montrons que $0\le U_{n+1}\le 1$

En effet $\alpha\le U_n\le 1$

et comme U_n est croissante sur $[0,1]\subset\mathbb{R}$ donc

$f(\alpha)\le f(U_n)\le f(1)$

Avec $f(\alpha)=\alpha$, $f(U_n)=U_{n+1}$ et $f(1)=\dfrac{e}{5}\le 1$

Donc on aura : $\alpha\le U_{n+1}\le 1$

Conclusion :

$\forall n\in\mathbb{N}: \alpha\le U_n\le 1$

b) on sait que pour $x\in[\alpha,1]$ $f(x)\le x$ d'après 3)b)

et comme $U_n\in[\alpha,1]$ on aura $f(U_n)\le U_n$

D'où $U_{n+1} \le U_n$ et par suite (U_n) est une suite décroissante

Conclusion :

(U_n) est une suite décroissante et minorée par α donc c'est une suite convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell \in [\alpha, 1]$

c) D'après 3)b/ on a : f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x \in [0,1] : 0 \le f'(x) \le \frac{3}{4}$

Donc d'après l'inégalité des accroissements Finis on a : $U_n \in [0,1], \alpha \in [0,1]$ donc sur $[\alpha, U_n]$

on a :

$$0 \le f(U_n) - f(\alpha) \le \frac{3}{4}(U_n - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow 0 \le U_{n+1} - \alpha \le \frac{3}{4}(U_n - \alpha)$$

d) on a : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \le U_{n+1} - \alpha \le \frac{3}{4}(U_n - \alpha)$

"Multiplions membre à membre "

$$\begin{cases} 0 \le U_1 - \alpha \le \frac{3}{4}(U_0 - \alpha) \\ \times\ 0 \le U_2 - \alpha \le \frac{3}{4}(U_1 - \alpha) \\ \times\ 0 \le U_3 - \alpha \le \frac{3}{4}(U_2 - \alpha) \\ \times\ \ \vdots \\ \ \ 0 \le U_n - \alpha \le \frac{3}{4}(U_{n-1} - \alpha) \end{cases}$$

$$= 0 \le U_n - \alpha \le \left(\frac{3}{4}\right)^n (U_0 - \alpha)$$

Donc $0 \le U_n - \alpha \le \left(\frac{3}{4}\right)^n U_0 - \alpha\left(\frac{3}{4}\right)^n$

Et $\left(\frac{3}{4}\right)^n U_0 - \alpha\left(\frac{3}{4}\right)^n \le \left(\frac{3}{4}\right)^n, (U_0 = 1)$

D'où : $0 \le U_n - \alpha \le \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Par suite : $\boxed{\alpha \le U_n \le \alpha + \left(\frac{3}{4}\right)^n, \forall\ n \in \mathbb{N}}$

e) on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{3}{4} < 1$

D'où : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha}$